УДК 550.831+550.838

Дослідження оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні

© *А.В. Чорний, Ю.І. Дубовенко, 2001*

Інститут геофізики НАН України, Київ, Україна

Надійшла 12 червня 2001 р.

Представлено членом редколегії В. І. Старостенком

Проанализированы основные математические модели ограниченной задами логарифмического потенциала для контактной поверхности. Отмечено, что параметрическая зависимость решений задачи от плотности активного слоя и от “*средней глубины*” или от асимптоты контакта является следствием изучаемых моделей сложной среды, а не принципиальной характеризацией задачи для неограниченных тел в отличие от задачи для ограниченных тел. Детально исследовано нелинейное интегральное уравнение для контактной поверхности в комплексной плоскости, которое зависит только от одного параметра - плотности гравитирующего слоя. Установлены условия корректной разрешимости уравнения. Доказаны локальные теоремы единственности, существования и устойчивости его решения на определенном компактном множестве.

The basic mathematical models of the inverse 1ogarithm potential problem for a contact surface are analyzed. It is noted, that some parametrical dependence of the problem solution upon the active layer density and “*mean depth*” or contact assymptote follows from the compound media model studied but is not the principled characterization of the problem for unlimited bodies in contrast to the problem for limited ones. The non-linear integral equation for the contact surface in complex domain, which depends only on the unique –parameter – the density of the disturbing layer, is explored in detail. The conditions of the equation correct solubility are established. Local theorems of uniqueness, existence and stability of its solution on the certain compact set are proved.

Вступ. Обернена задача потенціалу для контактної поверхні сформульовані давно і її дослідження висвітлені в численній геофізичній літературі, яка час від часу поновлюється. Разом з тим і досі не з’ясовано питання, з якими особливостями задачі пов’язано розмаїття її описів: чи то з неозорою множиною моделей задачі; чи то з наявністю теоретичних проблем її розв’язності, що важко піддаються дослідженню; чи то з труднощами чисельної реалізації її розв’язків, що трапляються на практиці. Відсутність у літературі детального аналізу постановок задачі і методів її розв’язування, з якого випливала б відповідь на поставлене питання, спонукає нас до спроби з’ясувати ситуацію, що склалася.

Проте ми не ставимо перед собою мети надати вичерпний огляд всієї літератури, в якій з тою чи іншою мірою повноти й строгості обмірковано проблеми коректної розв’язності й чисельної реалізації розв’язків задачі для контактної поверхні і вивчено ефективність їх використання для тлумачення природи гравітаційних та магнітних аномалій. Ми обмежились якісним аналізом основних, на нашу думку, праць, що проливають світло на стан і рівень вивченості математичної моделі задачі, залишаючи поза увагою багато цікавих питань прикладного, історичного, можливо, й пріоритетного плану.

Основні моделі задачі. Задачу про відновлення межі поділу двох однорідних середовищ уперше сформулював і наближено розв’язав Б.В. Нумеровим в 1930 р. у такій постановці [1]. Відомо, що *під плоскою поверхнею Землі* ∂D_1 : $y=0$ *є одна контактна границя* $\partial D_2 : \zeta=\zeta(x)$, $-\infty<x<\infty$, *що розділяє однорідні шари легких "верхніх " порід з густиною* $\sigma_1 = const$ *від важчих "нижніх" порід з густиною* $\sigma_2 = const$. Окрім різниці $\sigma=\sigma_1-\sigma_2$ густин порід *задано значення сили тяжіння* $U_y(x,0)$, $-\infty<x<\infty$, *і віддаль* $h=\zeta(x^*)$ *між поверхнями* ∂D_1 *і* ∂D_2 у певній точці x^*, яку відраховують за нормаллю до ∂D_1 (рис. 1).

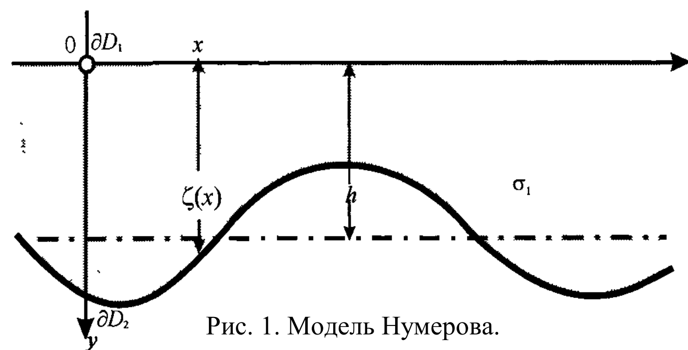


Рис. 1. Модель Нумерова.

За цими вихідними даними *потрібно визначити "поверхню"* ∂D_2, *припустивши, що невідома функція* $\zeta=\zeta(x)$, *яка описує межу поділу, є однозначною й обмеженою.* Для визначення контакту в цих умовах Б. В. Нумеров вивів нелінійне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}{(\xi-x)^2+h^2}d\xi=u(x)-h,\ u(x)=\frac{U_y(x,0)}{2\pi f\sigma}, \quad (1)$$

що залежить від *двох параметрів* – стрибка σ густини на контакті $\zeta(x)$ і глибини *h* залягання контакту в деякій довільно обраній точці x^*„ яка не збігається, взагалі кажучи, з точкою *x* спостереження поля; *f* – гравітаційна стала.

Наближений розв'язок цього рівняння Б. В. Нумеров отримав у вигляді

$$\zeta_{\text{Н}}(x)=h+\Delta_{\text{Н}}\zeta(x)$$

за додаткової умови, що рельєф контактної границі не надто контрастний, в крайньому випадку такий, що коливання функції $\Delta_{\text{Н}}\zeta(x)$ менше від *h*. За цієї умови однозначну функцію $\Delta_{\text{Н}}\zeta(x)$ визначено як обмежений розв'язок лінійного інтегрального рівняння першого роду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{(\xi-x)^2+h^2}\Delta\zeta(\xi)d\xi=u(x)-h\,, \tag{2}$$

яке залежить від *двох параметрів σ* і *h*, тобто $\Delta_{\text{Н}}\zeta(x)=\Delta\zeta(x;\sigma;h)$.

М.Р. Малкін [2, 3] задачу визначення контактної поверхні ∂D_2, яка розділяє два однорідні косонамагнічені шари, за заданим магнітним потенціалом і стрибком $J=(J_x,J_y)$ вектора намагніченості порід зводить до розв'язування нелінійного інтегрального рівняння, яке за умови вертикальної намагніченості порід цілком збігається з рівнянням (1). Наближений його розв'язок $\zeta_{\text{М}}(x)=h+\Delta_{\text{М}}\zeta(x)$ одержано методом Б.В. Нумерова. Тому він залежить від *трьох параметрів:* двох природних – складових J_x і J_y стрибка вектора намагніченості порід і одного "привнесеного" – товщини *h* виділеного однорідного магнітного шару, тобто $\Delta_{\text{М}}\zeta(x)=\Delta\zeta(x;J_x,J_y;h)$.

Г. Рейнбой [4], порівнюючи лінеаризоване рівняння (2) для контактної поверхні з інтегралом Пуассона для подання гармонійної функції *ν(x,y)* в півплощині за значенням її на рівні *y = h*

$$\nu(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{(\xi-x)^2+h^2}\nu(\xi,h)d\xi\,,$$

виявив, що *лінеаризована задача для контактної поверхні еквівалентна задачі визначення гармонічної функції* $\nu(x,y)$ за значеннями $\nu(x,0)$, тобто що $\Delta\zeta(x)=\nu(x,h)$. Тим самим він фактично показав, що *точний розв'язок* інтегрального рівняння (2) повинен бути *слідом гармонічної функції* (цей факт ще довго залишався неусвідомленим) і, окрім того, відкрив перспективний напрямок в теорії інтерпретації аномалій, пов'язаний з *аналітичним продовженням* полів у півпростір зосередження їх джерел (не тільки необмежених типу шару, але й обмежених) [5-10].

О. О. Заморєв [11, 12] дослідив в комплексній множині $z=x+iy$ задачу визначення контактної поверхні ∂D_2 у вигляді *скінченної ундуляції* $y(x)=h+\eta(x)$, $y(a)=y(b)=h$, на скінченному інтервалі $[a,b]$ горизонтальної" прямої $y(x)=h=const>0$, $x\notin[a,b]$ (рис. 2). Проблему відновлення форми збурюючого тіла (виповненого масами однорідної густини σ і обмеженого, на відміну від нумерівського шару, прямою $y=h$ і кривою $y(x)=h+\eta(x)$, $x\in[a,b]$, $\eta(a)=\eta(b)=0$), тобто задачу визначення *параметрів a,b,h* однозначної на інтервалі $[a,b]$ обмеженої функції $\eta(x)$ за заданими на осі $y=0$ значеннями (відповідним чином прокаліброваними) похідної логарифмічного потенціалу $U(x,y)$. О.О. Заморєв звів до нелінійного рівняння, яке можна записати в двох еквівалентних один одному зображеннях:

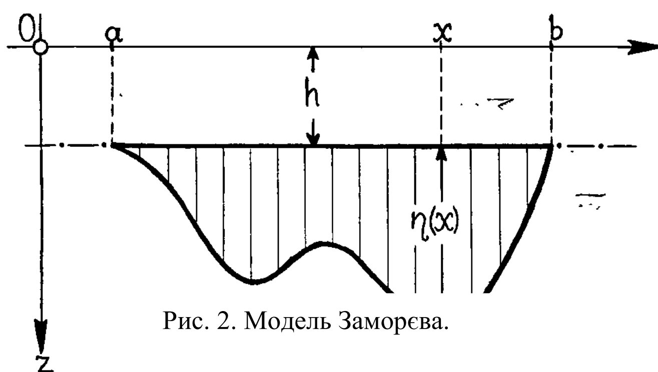


Рис. 2. Модель Заморєва.

$$\int_a^b \ln\frac{\xi-x+ih}{gx-x+i(h+\eta(\xi))}d\xi=\int_a^b\xi\left(\frac{1+\eta'(\xi)}{\xi-x+i(h\eta(\xi))}-\frac{1}{\xi-x+ih}\right)d\xi=u(z), \tag{3}$$

$$u(z)=\frac{G(z)}{\pi f\sigma},\quad G(z)=\frac{\partial U(z)}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}-i\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\right)$$

Обидва ці подання наведено у статті [11], до того ж друге, яке детально вивчено, одержано з першого інтегруванням частинами за умови, що $\eta(a)=\eta(b)=0$. В результаті аналізу другого подання напруженості *u(z)* поля О. О. Заморєв знайшов його *точне обернення.* На жаль, ефективність цього обернення при розв'язуванні прикладних задач не перевірено ще й досі. Звернемо тепер увагу на перше зображення напруженості поля. Неважко виявити, що дійсна її складова

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2+h^2}{(\xi-x)^2+y^2(\xi)}d\xi=u(x),\;\; y(x)=h+\eta(x),\; x\in[a,b] \tag{4}$$

за зовнішнім виглядом нагадує рівняння Б. В. Нумерова (1) без доданку *h* в правій частині, що відтворює за вибраної калібровки поля притягання однорідного шару товщиною *h*>0. Більше того, величина інтегралу в лівій частині рівняння (4) не змінюється на заморєвських тілах у разі заміни скінченних границь *a* і *b* на нескінченні -∞ і ∞, тому ліві частини рівнянь (1) і (4) за зовнішнім виглядом повністю збігаються, хоча і зображають в математичній символіці *різні* за суттю *предметні моделі:* перше – притягання необмеженим шаром між границями $y = h$ і $y = \zeta(x)$, $-\infty < x < \infty$; друге – притягання скінченним тілом, обмеженим кривими $y = h$ і $y = h + \eta(x)$, $x \in [a,b]$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Можливо, зовнішня подібність лівих частин рівнянь Б.В. Нумерова й О. О. Заморєва відігравала свою роль у подальших прикладних дослідженнях, серед яких осібно вирізняється праця [13].

У цій праці, написаній в 1941 р. і виданій в 1947 р., О.О. Шванк помітив, що коли в рівнянні Б.В. Нумерова *замість параметра h підставити значення контакту* $\zeta(x)$ в точці *x* спостереження поля, то з рівняння (1) виходить *нове нелінійне* інтегральне рівняння

$$\zeta(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{(\xi - x)^2 + \zeta(x)}{(\xi - x)^2 + \zeta(\xi)}\,d\xi = u(x), \tag{5}$$

яке за не дуже великих коливань шуканої функції $\zeta(x)$ можна розв'язувати *методом послідовних наближень.* На одному окремому прикладі він показав, що обчислені "вручну" послідовні наближення $\{\zeta_n(x)\}$ контакту $\zeta(x)$ з першого $\zeta_1(x) = u(x)$ і до 6-го включно мають тенденцію до збіжності. Проте зауваження О.О. Шванка, засноване на виводі Б.В. Нумерова, залишилось, на жаль, без уваги, можливо, через те, що і в самого автора пропозиції *не склалося чіткої думки про єдино можливий функціональний зв'язок* поміж контактом і полем.

Дійсно, в § 2 розд. 8 (стор. 361-374) його книги [13] для поля від контакту розглядаються, як *рівноправні,* два вирази, один з яких, а саме,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{(\xi - x)^2 + h^2}\,\Delta\zeta(\xi)\,d\xi = u(x),\quad \Delta\zeta(x) = \zeta(x) - h\,, \tag{6}$$

являє собою лінеаризацію зв'язку

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{(\xi - x)^2 + h^2}{(\xi - x)^2 + \zeta^2(\xi)}\,d\xi = u(x), \tag{7}$$

а другий – зв'язок вигляду (5). Так чи інакше, але в наступних роботах О.К. Маловичка [14, 15], В.М. Новоселицького [16, 17] і багатьох інших авторів [7, 18-34] *за рівняння для контактної поверхні брали вираз* (7) або його *лінеаризацію* (6). Кожен з цих виразів залежить від *двох параметрів –* σ і *h –* й описує, як це випливає з інтегрального рівняння (4) Заморєва при $a \to -\infty$ і $b \to \infty$, вплив необмеженого в латеральному напрямку і обмеженого за товщиною геологічного тіла на зразок синклінорію, антикліналі й синкліналі якого виповнені масами однорідної густини протилежних знаків (рис. 3). Тіло це відділено від рівня спостережень шаром товщини *h*, дія якого виразом (7) *не враховується.* Разом з тим, у цій постановці було отримано цікаві результати, які бажано використати в теорії структурної задачі, що ґрунтується на рівнянні (5).

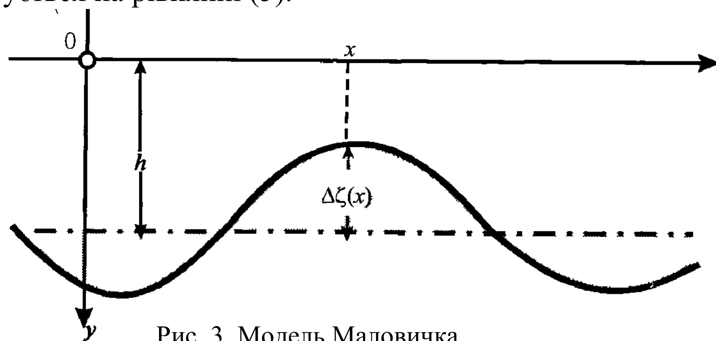


Рис. 3. Модель Маловичка.

До числа таких розробок в першу чергу відносяться відкриті М.Г. Сербуленком [18, 19] і Ю.В. Антоновим [20-22] *способи визначення двох і більше контактних границь,* що розділяють однорідні шари. Слід згадати також дослідження О.К. Маловичком [15] питань *уточнення розв'язків* лінеаризованого рівняння та єдиності його розв'язків, якими встановлено, що *одному й тому ж полю можуть відповідати як обмежені* однорідні випуклі тіла, так і *різноманітні необмежені* однорідні тіла типу шару. Заслуговують на увагу перші результати чисельного розв'язку нелінійного інтегрального рівняння (7) у межах теорії регуляризації [23-30], вивчення В.І. Старостенком [31] можливостей *стійкого чисельного визначення декількох контактних границь,* що описуються нелінійними рівняннями виду (7), і спроби О.І. Кобрунова та Р.П. Денисюка [32-34] відшукати за допомогою одного чисельного алгоритму границі розподілу *неоднорідних* комплексів.

Аналогічну модель задачі для контактної поверхні в комплексній площині $z = x + iy$ запропоновано в 70-х р.р. минулого століття В.М. Страховим [35-39].

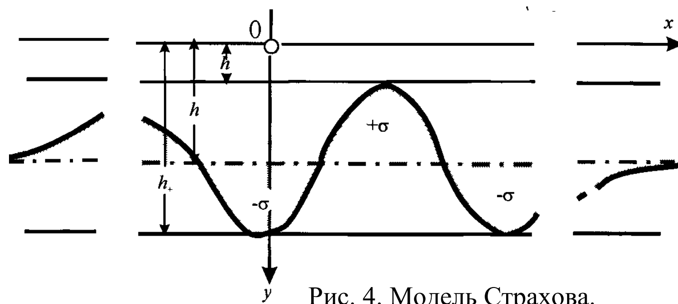


Рис. 4. Модель Страхова.

Саме для *шаруватого середовища у смузі, відок ремленій від нуля і обмеженій прямими* $y = h^-$ і $y = h^+$, $h^- < h^+ < 0$, що складаються з *двох однорідних шарів* порід з густинами σ, і σ₂, які *розділяє жорданова крива* $\partial D : \eta = \eta(x)$, $-\infty < x < \infty$ зі *стрибком* $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ густини на контакті і з *асимптотою h,* $h^- < h < h^+$, однією й тією ж ліворуч та праворуч, яку *крива* ∂D *може перетинати не більше, ніж скінченне число разів* (рис. 4), він вивів нове нелінійне інтегральне рівняння

$$\int_{\partial D} \frac{s - \bar{s} - 2ih}{s - z} ds = \begin{cases} u^+(z), & z \in D^+ \\ u^-(z), & z \in D^- \end{cases}, \tag{8}$$

де D^+ - частина площини "вище" кривої ∂D, D^- – "нижче" кривої ∂D, $s = \xi + i\eta$, $\bar{s} = \xi - i\eta$; $u(z)$ – в калібровці (3) задано за результатами спостережень на "земній поверхні" $y = 0$. Для цього рівняння В.М. Страхов довів *теорему єдиності* його розв'язку і *редукував* задачу визначення контакту за полем до задачі *побудови допоміжної функції,* що конформно (і однолистно) відображає нижню півплощину певної комплексної площини на область D^- під шуканою кривою.

Цей підхід до розв'язування задачі передбачалося побудувати за аналогією з розвинутим В.К. Івановим методом відшукання однорідно розподілених джерел на скінченних однозв'язних областях [40, 41]. Незабаром після вибраної редукції було знайдено цілі *класи розв'язків* рівняння (8). Їх подавали або як сімейства *розв'язків у скінченному вигляді,* коли границю шуканої області визначають скінченним числом параметрів зі скінченної системи (нелінійних) рівнянь, або у вигляді двопараметричних сімейств *розв'язків "в малому",* коли границю визначають у вигляді (невеликих) відхилень контура шуканої від контура заданої області. Ці класи отримали, відповідно, О. В. Цирульський [42, 43] і В.Г. Чередніченко [44]. До того ж В.Г. Чередніченко зняв обмеження [38] на розв'язки рівняння (8), допустивши, що крива ∂D необов'язково має бути графіком і може перетинати асимптоту *h* нескінченну кількість разів.

Отож, для опису фундаментальної залежності гравітаційного поля від шаруватого середовища було запропоновано на початок 1980-х років дві принципово різні математичні моделі: *модель Нумерова* (рис.1) та *модель Маловичка-Страхова* (рис.4). У моделі Нумерова як прикладну модель середовища розглянуто необмежений шар між контурами ∂D_1 та ∂D_2, його притягання враховано у вигляді суми притягання шаром постійної товщини *h* і відхиленнями від цього шару між прямою $y = h$ і кривою $y = \zeta(x)$. У моделі Маловичка-Страхова предметну модель шаруватого середовища ототожнено з флуктуаціями $y = \eta(x) - h$ кривої $y = \eta(x)$ відносно своєї асимптоти *h*, що обмежують "додатні" та "від'ємні" маси густиною σ; поле цих мас аж ніяк не могло збігатися з полем моделі Нумерова, оскільки *не було враховано вплив* шару товщиною *h.* Проте кожне з інтегральних рівнянь (1) і (8), що відповідало тій чи іншій моделі, виявилось однаково залежним від *двох параметрів:* надлишкової густини σ і сталої товщини (асимптоти) *h* шару. Відповідно і розв'язки рівнянь також стали залежними від цих параметрів.

У літературі відзначений параметричний зв'язок подано навіть як *визначальний* для класифікації обернених задач гравіметрії. З виходом у світ раць [35-39, 42-44], в яких закладено основи теорії оберненої задачі для предметної моделі Маловичка-Страхова (рис.4), устоялося положення, що *обернені задачі для обмежених тіл принципово відрізняються від обернених задач для необмежених тіл*. Їх відмінність полягає саме в тому, що розв'язки задач для обмежених тіл залежать тільки від одного параметра а, тоді як розв'язки для необмежених тіл залежать як від параметра а, так і від параметра *h* ("*середньої глибини*" за Нумеровим або асимптоти за Страховим).

І довгий час ніхто не піддавав сумніву переконливість цього твердження, хоч воно явно не узгоджувалося з аналізом рівнянь (8) та (5). Уже побіжний погляд на них переконує, що рівняння (8), а отже, й його розв'язок має залежати як від параметра σ, так і від асимптоти *h* шуканого контура *∂D,* тоді як рівняння (5) для того ж контура (як і численних інших обмежених) від параметра *h* не залежить. Рівняння (5), *якщо воно вірне,* давало зразок опису задачі для контактної поверхні, для якого одне з положень теорії, розвинутої в роботах [35-39, 42-44], потребувало уточнення. З невідомих причин цього не сталося. Або автор пропозиції (5) чи його послідовники не були впевнені в адекватності опису моделі задачі, або авторам праць [35-39, 42-44] не була відома праця [13].

Так чи інакше, але рівняння (5) було проігноровано під час побудови теорії обернених задач для шаруватих середовищ і питання про вирішальну відмінність задач для обмежених та необмежених тіл залишилося відкритим. Окрім того, в створеній теорії не розглянуто узагальнення відкритого Г. Рейнбоєм факту, що розв'язки лінеаризованого інтегрального рівняння для контактної поверхні слід шукати на

обмежених множинах гармонічних функцій. Математичне обґрунтування згаданих та інших супутніх проблем стало предметом подальших досліджень [45-55].

Початок цих досліджень було закладено аналізом предметних моделей Нумерова і Маловика-Страхова. В результаті адекватною для двовимірною евклідового простору $R^{(2)} = R^{1(1)} \times R^{(1)}$, $R^{(1)} = (-\infty, \infty)$ виявилась предметна модель Нумерова, яку подано у вигляді шару

$$D = \{(x, y): -\infty < x < \infty;\ 0 \le y \le \zeta(x)\},$$

обмеженого контурами $\partial D_1: \ y = 0$ і $\partial D_2: \ y = \zeta(x),\ x \in R^{(1)}$, зануреного в простір $R^{(2)}$ і виповненого масами постійної густини $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$. Відповідну предметній математичну модель контактної поверхні знаходять за допомогою *регуляризації* відповідного означеного інтегралу, що розбігається на границі $\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2$ збурювальної області *D*. Регуляризацію здійснено за правилом [45, 52]

$$u(x, y) = \lim_{\varepsilon \leftarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\varepsilon}^{\zeta(x)} \frac{\eta - y}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} d\eta =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(\xi - x)^2 + [\zeta(\xi) - y]^2}{(\xi - x)^2 + [\zeta(x) - y]^2} d\xi + \begin{cases} +\zeta(x), \ y \le 0, \\ \zeta(x) - 2y, \ 0 < y < \zeta(x), \\ -\zeta(x), \ y \ge \zeta(x). \end{cases}$$

Ця операція дає *теоретичне обґрунтування* нелінійного інтегрального рівняння (5) і забезпечує його *адекватність* геологічній моделі шаруватого середовища. Аналог цього рівняння у комплексній площині $z = x + iy$ має такий вигляд [45, 55]

$$-\frac{s_0 - \bar{s}_0}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_2} \frac{s - \bar{s} - s_0 + \bar{s}_0}{s - z} ds = u(z), \tag{9}$$

де $u(z)$ – напруження поля за калібровкою (3); $s = \xi + i\zeta(\xi)$; $s_0 = x + i\zeta(x)$ – точки контура ∂D_2; $\bar{s} = \xi - i\zeta(\xi)$, $\bar{s}_o = x - i\zeta(x)$ – спряжені з ними точки.

Перетворимо це рівняння до зручного для порівняння з поданням (8) вигляду. Оскільки, як згодом буде доведено,

$$\int_{\partial D_2} \frac{ds}{s - z} = \begin{cases} +i\pi, \ z \in D^+, \\ -i\pi, \ z \in D^-, \end{cases} \tag{10}$$

де D^+ – область над кривою ∂D_2, а D^- – під ∂D_2, то, очевидно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} \frac{s - \bar{s} - 2(s_0 - \bar{s}_0)}{s - z} ds = u(z).$$

Якщо ж серед множини обмежених знайдеться крива ∂D_2, що має асимптоту *h* ліворуч й праворуч, то, взявши у співвідношенні (9) $\bar{s} - \bar{s}_0 = \lim_{|x| \to \infty} i\zeta(x) = 2ih$, отримаємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} \frac{s - \bar{s} - 4ih}{s - z} ds = u(z) \text{ або ж } \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} \frac{s - \bar{s} - 2ih}{s - z} ds = u(z) + ih .$$

Порівнюючи останній вираз з рівнянням Страхова (8), дійдемо висновку, що рівняння (8) є *частинним випадком* від наведеного (9), в якому до того ж *не враховується* (як і у попередньому рівнянні (7)) притягання шаром постійної товщини *h*. Окрім того, подання (8) від рівняння (9) суттєво відрізняється не тільки тим, що воно описує значно *вужчу* множину можливих контурів збурювальних шарів, а й, головне, тим, що воно залежить від параметра *h,* якому в теорії [35-39, 42-44] надано визначальну роль.

У зв'язку з вивченням шаруватих структур введено [45, 47] клас Нумерова $Nu^{(k,\alpha)}(\sigma, \Pi) = S_{loc}(D) \times C^{(k,\alpha)}(R^{(1)})$ як декартовий добуток множини $S_{loc}(D)$ обмежених і (майже всюди) локально інтегрованих функцій, що описують густину $\sigma = \sigma(x, y)$, $(x, y) \in D$ мас в області $D \subset R^{(2)}$ та сукупності $C^{k,\alpha}(R^{(1)})$, $k = 0,1,...,$; $0 < \alpha \le 1$ функцій $y = \zeta(x)$, $x \in R^{(2)}$ неперевних (за Гельдером) з їхніми похідними до *k*-го порядку включно з показниками α, що описують контакти різнорідних шарів зі смуги $\Pi = \{(x, y): \ -\infty < x < \infty;\ 0 < \zeta(x) \le h_0\}$, де h_0 – обмежена стала. У працях [45-55] розв'язки рівняння (9) розглянуто на класі $Nu^{(k,\alpha)}(1, \Pi)$ зі сталою густиною (відзначеною символом 1). Показано [45], що на класі обмежених східчастих контурів обернене відображення поля в параметри середовища є розривним. Більше того, оскільки [46] нелінійний оператор

$$A(\zeta;x)=\zeta(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}d\xi$$

прямої задачі для контактної поверхні є обмеженим, неперервним і компактним тоді і тільки тоді, коли він діє на множині $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ функцій, неперервних (з показником α) на $R^{(1)}$ разом зі своїми першими похідними, то задача розв'язування рівняння (5) поставлена некоректно і на множині $Nu^{(0,\alpha)}(1,\Pi)$ неперервних функцій (цей факт, між іншим, випливає також з того, що кожна східчаста функція може бути подана у вигляді границі певної послідовності неперервних функцій).

Доведено теорему єдиності розв'язку рівняння (5) на $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$. Доведення здійснено узагальненим на випадок необмежених зірчастих тіл методом, створеним зусиллями П.С. Новікова [56], О. О. Заморєва [11], Л.М. Сретенського [57], І.Т. Тодорова, Д.П. Зідарова [58], М.М. Лаврентьєва [59] і О. І. Прилєпка [60] для обмежених зірчастих тіл. Суть методу полягає в побудові й оцінці певного функціоналу, значення якого слугують ідентифікатором дійсності висловленої пропозиції. Функціонал будують з використанням фундаментальної інтегро-диференціальної тотожності Остроградського-Гріна, він відображає рівність зовнішніх потенціалів (або їх похідних) і властивості густини тіла, що не породжує зовнішнього потенціалу. Функціонал визначають на певній гармонічній функції, яку, у свою чергу, будують за визначеними даними граничної задачі Діріхле в об'єднанні областей, що зумовлюють згадані потенціали.

Вибором методу доведення теорем єдиності розв'язку визначають і сам структурний клас $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, до якого цей розв'язок може належати.

Проблему ж існування розв'язку задачі, як її трактують у працях [47, 52-55], а також *питання стійкості* розв'язків розкривають майже "дарма" завдяки спеціальному поданню лівої частини рівняння (5). Задавши її у вигляді двох складових, одна з яких (невідома фунція), як виявилося, *домінує* за нормою над іншою (інтегральним членом, залежним від невідомої функції), автори отримали можливість побудувати таку послідовність *компактних* операторів, яка збігається до необмеженого *оберненого* до $A(\zeta;x)$ оператора, і за його допомогою, у свою чергу, визначити *точний* розв'язок рівняння з множини допустимих.

Таким чином було встановлено, що задачу відновлення контуру необмеженого шару за даними спостережень потенціалу поставлено коректно за Тихоновим на нумерівському класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, тобто, що на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ розв'язок задачі існує, єдиний і стійкий. До того ж, цей розв'язок залежить (як і в задачах для обмежених тіл) *тільки від одного* параметра σ і зовсім не залежить від параметра *h (середньої глибини* до контакту за Нумеровим або його *асимптоти* за Страховим).

На основі створеної теорії розроблено два чисельні регулярні способи розв'язування оберненої задачі за наявності перешкод. Побудова одного з них заснована на тому, що значення поля, за якими визначають фрагмент контуру, задають на практично необмеженому інтервалі. В цій ситуації апроксимацію оператора прямої задачі $A(\zeta;x)$ можна виконувати з високою точністю. Побудову другого здійснюють за умови, що значення поля задано на короткому інтервалі і апроксимацію оператора прямої задачі можна здійснити з невисокою точністю. У першому випадку, за умови високоточної апроксимації оператора $A(\zeta;x)$, для чисельного пошуку каркасу наближеного розв'язку рівняння (5) конструюють регуляризуючий алгоритм за способом М.М. Лаврентьєва [59]; у другому – для знаходження каркасу розв'язку використовують алгоритм, побудований в межах теорії регуляризації за Тихоновим [29].

У цьому алгоритмі *вперше обґрунтовано вибір* саме такого *стабілізатора,* який відповідає характерним властивостям розв'язків й забезпечує пошук розв'язків на множинах єдиності, і *рекомендовано* певну нестандартну *процедуру* для точнішої порівняно з традиційними *апроксимації рівнянь* Ейлера, що не потребує перемноження матриць високої розмірності. Ретельно вивчені питання скінченновимірної апроксимації оператора $A(\zeta;x)$ і послідовних наближень оберненого оператора $A^{-1}(\zeta;x)$.

Особливу увага приділено залежності чисельних розв'язків від *багатьох параметрів,* які супроводжують дискретизацію задачі, і вказано способи вибору таких значень цих параметрів, які сприяють одержанню оптимальних чисельних розв'язків. Доведено *збіжність* каркасів наближених розв'язків до точного розв'язку рівняння (5). Детально з теорією оберненої задачі для контактної поверхні читач може при бажанні ознайомитись в дисертації Н.Н. Чорної [52].

У працях [61-70] структурну задачу гравіметрії трактовано як задачу визначення за даними спостережень контуру необмеженого зірчастого тіла, близького до шару постійної товщини. Основним рівнянням задачі в цій постановці є співвідношення (1), одержане Б.В. Нумеровим понад 70 років тому. Для відновлення границі $\partial D_2:\ y=\zeta(x),\ x\in R^{(1)}$ збурювального тіла відомої сталої густини σ за значеннями похідних логарифмічного потенціалу, заданими на множині єдиності, або, що те ж саме, для роз-

в'язування нелінійного інтегрального рівняння (1) запропоновано [61, 64] такий спосіб. Розв'язок рівняння (1) відшукують у вигляді границі послідовності розв'язків певної послідовності лінійних інтегральних рівнянь першого роду, що апроксимує вихідне нелінійне рівняння. Встановлено [62, 65], що оператори послідовності лінійних рівнянь є обмеженими, неперервними і компактними в просторах функцій, які найчастіше використовуються при розв'язуванні обернених задач потенціалу.

Виконано спектральний аналіз операторів, на основі якого вказано ефективні критерії належності вихідних даних і розв'язків відповідним їм області значень оператора і області визначення нормальних розв'язків. Доведено [63, 66] локальні теореми існування та стійкості розв'язків задачі визначення необмежених зірчастих областей, близьких до заданих. Показано, що задачу поставлено коректно тільки на компактних множинах банахових просторів вихідних даних та розв'язків. Внаслідок умовної її коректності для отримання ефективного розв'язку слід застосовувати спеціальні регулярні методи. В основі підходу закладено теорію згладжувального функціоналу над просторами даних і розв'язків.

Детально вивчено його складові: функціонали нев'язки або функціонали типу нев'язки та стабілізатори [67]. Показано, що функціонали нев'язки чи типу нев'язки лінійного інтегрального рівняння першого роду з невід'ємним компактним оператором є строго випуклими, двічі неперервно диференційованими функціями. Множини точок мінімумів функціоналів над гільбертовим простором даних є множинами другої категорії по відношенню до множини всіх точних (нормальних) розв'язків інтегрального рівняння (множини єдиності). Тому не кожна послідовність, яка мінімізує функціонали, збігається до множини єдиності, через що задача пошуку мінімуму функціоналів над гільбертовим простором даних є *некоректною*.

Недостатніми є й додаткові вимоги, які широко використовують, стосовно мінімальності норми розв'язку при мінімізації функціоналів нев'язки. Для орієнтування пошуку нормального розв'язку рівняння за допомогою мінімізації функціоналів нев'язки й типу нев'язки запропоновано спеціальні стабілізатори, визначені на множині єдиності. Їх конструюють за допомогою певних диференціальних операторів, власні функції яких тісно пов'язані з власними функціями операторів прямої відповідності в задачах визначення зірчастих областей. Спеціальні стабілізатори — це невід'ємні, сильно випуклі, двічі неперервно диференційовані функціонали, що не мають локальних мінімумів, окрім глобального.

Вперше встановлено існування такого регуляризуючого оператора для лінійного інтегрального рівняння першого роду, який серед відомих його модифікацій має найкращу обумовленість. Кожній функції з гільбертового простору даних оператор ставить у відповідність функції гільбертового простору розв'язків, що мають узагальнену похідну, яка інтегрується з квадратом. У свою чергу, кожна з функцій, яку обчислюють за допомогою цього оператора, є екстремаллю згладжуювального функціоналу, який є зваженою сумою функціоналу типу нев'язки з одним із запропонованих стабілізаторів, що забезпечують однозначну розв'язуваність вихідних задач. Глобальні регуляризуючі оператори визначення зірчастих областей, близьких до шару постійної товщини, будують у вигляді послідовності локальних регуляризуючих операторів для відповідних послідовностей лінійних інтегральних рівнянь першого роду, в правих частинах яких використовують згладжені вихідні дані. У свою чергу, локальні регуляризуючі оператори для лінійних інтегральних інтегральних рівнянь конструюють у вигляді параметризованих послідовностей, що мінімізують згладжувальні функціонали [68].

Ця стаття розпочинає серію, в якій передбачається розгорнути теорію структурних задач, яку було започатковано в нотатках [45, 48], зокрема розглянути питання коректного розв'язування рівняння (9) в комплексній площині.

Проблеми коректної розв'язуваності задачі в комплексній області. Розгортання теорії розв'язування рівняння (9) розпочнемо з обґрунтування співвідношення (10).

Лема. *Якщо контур* $\partial D: \ y=\zeta(x), \ \ x\in R^{(1)}$ *належить до класу неперервно диференційованих (за Гельдером) функцій* $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, *то*

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{ds}{s-z}=\begin{cases}+1, & z\in D^{+},\\ -1, & z\in D^{-}\end{cases}.$$

Доведення проведемо для випадку, коли $z\in D^{+}$. Оскільки функція виду $f(s)= \ =1/(s-z)$ є аналітичною в незамкненій області $D^{+}\setminus\{z\}$ з виколотою точкою $z=x+iy$, то на основі відомої теореми Коші [71] інтеграл, що нас цікавить, можна подати в такому вигляді (рис. 5):

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{ds}{s-z}=\frac{1}{\pi i}\lim_{\substack{x_{\text{у}}\to-\infty\\ x_{\text{в}}\to+\infty}}\left(\int\limits_{\partial D_1^*}\frac{ds}{s-z}+\int\limits_{\partial D_2^*}\frac{ds}{s-z}\right)=\frac{1}{\pi i}\lim_{\substack{x_{\text{у}}\to-\infty\\ x_{\text{в}}\to+\infty}}\left(\int\limits_{c_1}\frac{ds}{s-z}-\int\limits_{c_1}\frac{ds}{s-z}+\int\limits_{c_2}\frac{ds}{s-z}-\int\limits_{c_3}\frac{ds}{s-z}-\int\limits_{c_4+c_5}\frac{ds}{s-z}\right),$$

де ∂D_1^* і ∂D_2^* — частини контуру ∂D між точками $(x_{\text{н}},\zeta(x_{\text{н}}))$, $(0,\zeta(0))$ і $(x_{\text{в}},\zeta(x_{\text{в}}))$; C_1 – розтин між точками $z=(0,0)$ і $(0,\zeta(0))$; C_2 і C_3 – коло радіуса $\varepsilon=|s-z|$ й концентричне до нього півколо радіуса

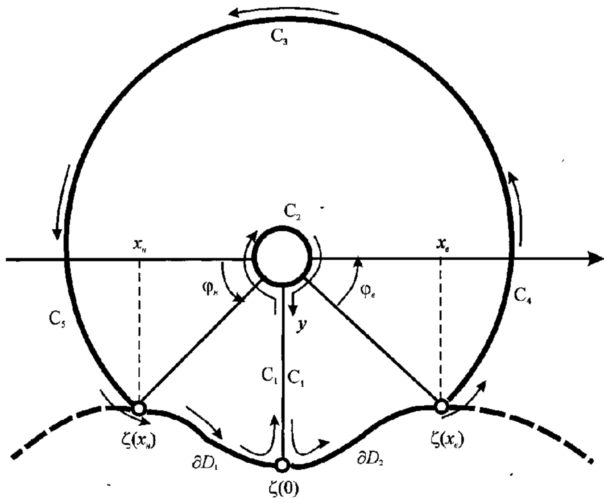


Рис. 5. Зображення інтегралу для нелінійного рівняння контакту в комплексній площині.

$R=\left|\bar{s}-z\right|$ з центром у точці $z=(0,0)$; C_4 і C_5 – дуги секторів, кути розхилу яких відповідно дорівнюють:

$$\varphi_{\text{н}}=\operatorname{arctg}\frac{\zeta(x_{\text{н}})}{x_{н}}=-\operatorname{arctg}\frac{R}{|x_{\text{н}}|\sqrt{1+\left(x_{н}/\zeta(x_{\text{н}})\right)^{2}}}\Bigg|_{|x_{\text{н}}|\to\infty}\to 0\,,$$

$$\varphi_{\text{в}}=\operatorname{arctg}\frac{\zeta(x_{\text{в}})}{x_{в}}=-\operatorname{arctg}\frac{R}{|x_{\text{в}}|\sqrt{1+\left(x_{в}/\zeta(x_{\text{в}})\right)^{2}}}\Bigg|_{|x_{\text{в}}|\to\infty}\to 0\,. \tag{11}$$

Криволінійні інтеграли за дугами ∂D_i^*, $i=1{,}2$, очевидно, *існують* тільки тоді, коли контур $\zeta(x)$ *належить* до класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$. У цьому випадку величину

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\partial D_1^*+\partial D_2^*}\frac{ds}{s-z}=\frac{1}{\pi i}\left(\int\limits_{x_{\text{н}}}^{0}\frac{1+i\zeta'(\xi)}{\xi+i\zeta(\xi)-z}d\xi+\int\limits_{0}^{x_{\text{в}}}\frac{1+i\zeta'(\xi)}{\xi+i\zeta(\xi)-z}d\xi\right)$$

цілком визначають фіксованими числами x_H і $x_в$, а її границю при $x_H\to-\infty$, $x_в\to\infty$ з урахуванням відношень (11) знаходять так:

$$\frac{1}{\pi i}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to-\infty}}\left(\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\varepsilon ie^{i\varphi}d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}}-\int\limits_{0}^{\pi}\frac{Rie^{i\varphi}d\varphi}{R\cdot e^{i\varphi}}-\int\limits_{2\pi-\varphi_{\text{н}}}^{2\pi}\frac{Rie^{i\varphi}d\varphi}{R\cdot e^{i\varphi}}-\int\limits_{\pi}^{\pi+\varphi_{\text{н}}}\frac{Rie^{i\varphi}d\varphi}{R\cdot e^{i\varphi}}\right)=1$$

Випадок, коли , розглядають аналогічно. Лему доведено.

На основі доведеної леми нелінійне інтегральне рівняння (9) подамо у вигляді

$$-\left(s_0-\bar{s}_0\right)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{s-z}ds=u(z) \tag{12}$$

зручнішому для подальшого дослідження.

Теорема 1. *Якщо контур* ∂D: $y=\zeta(x)$, $x\in R^{(1)}$ *належить до класу* $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, *тобто задовольняє вимогам* $\left\|\zeta(x)\right\|_C\le M$; $\left\|\zeta'(x)\right\|_C\le m$, $m,M<\infty$, *то оператор прямої задачі*

$$A(\zeta;z)=-\left(s_0-\bar{s}_0\right)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{s-z}ds$$

є обмеженим, неперервним і компактним оператором на $C\left(R^{(1)}\right)$.

Доведення *обмеженості* оператора випливає з очевидної оцінки

$$\left|A(\zeta;z)\right|=\left|2i\zeta(x)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial D}\frac{\zeta(\xi)}{s-z}ds\right|\le 3\left\|\zeta(x)\right\|_C\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial D}\frac{ds}{s-z}\right|\le 3M\,.$$

Для доведення його *неперервності* розглянемо різницю

$$A(\zeta+\eta;z)-A(\zeta;z)=-2i\eta(x)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{s^*-\bar{s}^*}{s^*-z}ds^*-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{s-z}ds\,,$$

де $s^*=\xi+i\zeta+i\eta=s+i\eta$, ∂D^*: $y=\zeta(x)+\eta(x)$, $x\in R^{(1)}$; $\eta(x)$ – достатньо мала варіація функції $\zeta(x)$ у тому сенсі, що функція $\eta(x)$ для довільного числа $\varepsilon>0$ задовольняє вимогам

$$\left\|\eta(x)\right\|_C=\max_x\left|\eta(x)\right|<\varepsilon\,;\;\;\eta(-\infty)=\eta(\infty)=0\,.$$

Оскільки варіація $\eta(x)$ мала, то

$$\frac{1}{s^*-z}=\frac{1}{s-z}\frac{1}{1+i\eta/(s-z)}=\frac{1}{s-z}\left(1-\frac{i\eta}{s-z}+\left(\frac{i\eta}{s-z}\right)^2-\ldots\right),$$

і тому $A(\zeta+\eta;z)-A(\zeta;z)=-2i\eta(x)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\partial D}\frac{2i\eta}{s-z}ds-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{(s-z)^2}i\eta ds+\ldots$

Звідси неважко вивести рівність $\left|A(\zeta+\eta;z)-A(\zeta;z)\right|\le\dfrac{7}{2}\left\|\eta(x)\right\|<7\varepsilon/2$, яка засвідчує неперервність

оператора $A(\zeta;z)$ в $C(R^{(1)})$ через те, що число $\varepsilon > 0$ довільне.

Для доведення *компактності* (*повної неперервності*) оператора $A(\zeta;z)$ покажемо, що він переводить довільну обмежену множину, зокрема клас $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, функцій в компактну (за метрикою $C(R^{(1)})$) множину функцій $u(z)=A(\zeta;z)\in V(A)$. Раніше вже була нагода переконатися, що оператор $A(\zeta;z)$ обмежений на довільній обмеженій множині функцій, тому для $\zeta\in Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ матимемо

$$\|u(z)\|_C \le 3\|\zeta(x)\|_C .$$

Цією нерівністю встановлено *рівномірну обмеженість* множини $V(A)$. Доведемо *її одностайну неперервність*. Нехай $|z_1-z_2|<\varepsilon$ для довільного числа $\varepsilon>0$. Тоді різниці

$$u(z_1)-u(z_2)=2i[\zeta(x_2)-\zeta(x_1)]+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\left(\frac{s-\bar{s}}{s-z_1}-\frac{s-\bar{s}}{s-z_2}\right)ds$$

з урахуванням розгортання

$$\frac{1}{s-z_1}=\frac{1}{s-z_2}\frac{1}{1-(z_1-z_2)/(s-z_2)}=\frac{1}{s-z_2}\left(1+\frac{z_1-z_2}{s-z_2}+\ldots+\left(\frac{z_1-z_2}{s-z_2}\right)^n+\frac{1}{s-z_1}\left(\frac{z_1-z_2}{s-z_2}\right)^{n+1}\right)$$

можна надати вигляду

$$u(z_1)-u(z_2)=2i[\zeta(x_2)-\zeta(x_1)]+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}(z_1-z_2)^k\int_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{(s-z_2)^{k+1}}ds+\frac{(z_1-z_2)^{n+1}}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{(s-z_1)(s-z_2)^{n+1}}ds .$$

Проте функція $\zeta(x)$ неперервно диференційованна на $R^{(1)}$ і, до того ж, $|x_1-x_2|<|z_1-z_2|$, через це норма різниці набирає вигляду:

$$\|u(z_1)-u(z_2)\|_C \le 2\|\zeta'(x)\|_C\,\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{(s-z)^2}ds\right|<\varepsilon(2m+1/2)$$

Одержана нерівність означає, що множина $V(A)$ функцій $u(z)$ є одностайно неперервною. За відомою теоремою Арцела [72], множина $V(A)$ є *компактною*, а оператор $A(\zeta;z)$ – *цілком неперервним* (*компактним*) у метриці простору неперервних функцій. Теорему повністю доведено.

Визначальна роль доведеної теореми для розв'язування рівняння (12) полягає в тому, що вона орієнтує напрям пошуку розв'язків за їх характеризацією. На конкретних елементах того чи іншого класу функцій можна показати, що неперервна залежність розв'язку інтегрального рівняння (12) від його правої частини відсутня не тільки в просторах обмежених (східчастих) функцій, а й у просторах неперервних $C(R^{(1)})$ або ж інтегрованих (абсолютно чи з квадратом) $L^{(k)}(R^{(1)})$, $k=1,2$ функцій.

Для того, щоб у цьому переконатися, досить розглянути значення оператора $A(\zeta;z)$ на певній послідовності неперервних функцій, що збігаються до тієї східчастої, яку розглянуто у праці [53]. Оператор $A(\zeta;z)$, як встановлено теоремою 1, неперервний принаймні на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, і щонайменше тільки на цьому класі потрібно відшукувати розв'язок рівняння (12) для вхідних даних з просторів $C(R^{(1)})$ та $L^{(k)}(R^{(1)})$, $k=1,2$.

Теорема 2 (єдиності). *Розв'язок нелінійного інтегрального рівняння (12), якщо він існує, єдиний на множині* $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ *неперервно диференційованих функцій.*

Дійсно, однорідне нелінійне рівняння

$$-(s_0-\bar{s}_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{s-z}ds=0 \qquad (13)$$

на множині $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ має тільки тривіальний розв'язок. У цьому нас переконує суперечлива нерівність

$$\|s_0-\bar{s}_0\|_C=\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{s-\bar{s}}{s-z}ds\right\|_C\le\frac{1}{2}\|s-\bar{s}\|\left|\frac{1}{\pi i}\int_{\partial D}\frac{ds}{s-z}\right|\le\frac{1}{2}\|s-\bar{s}\|_C ,$$

яку виведено на основі леми.

Отже, однорідне рівняння (13) має тільки тривіальний розв'язок, а рівняння (12), якщо й має розв'язок, то він однозначно визначається на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$.

Надалі зауважимо, що з огляду на те, що довільну функцію $\zeta(x)$ з множини $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ можна

подати у вигляді $\zeta(x)=\zeta(0)+\int\limits_0^x \zeta'(t)dt$, ця множина є рівномірно обмеженою і водночас неперервною, тобто є *компактною* множиною функцій.

Теорема 3 (існування). *Процес послідовних наближень*

$$s_0^{(n+1)}-\overline{s}_0^{(n+1)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{s^{(n)}-\overline{s}^{(n)}}{s^{(n)}-z}ds^{(n)}-u(z),\ n=0,1,2,...,;\ s^{(0)}-\overline{s}^{(0)}=u(z) \qquad (14)$$

збігається на компактній множині $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ *до (нормального) розв'язку нелінійного інтегрального рівняння (12) зі швидкістю геометричної прогресії.*

Для доведення цієї теореми достатньо показати збіжність ітераційного процесу (14) і визначити його швидкість. Твердження стосовно того, що гранична функція $\zeta(x)$ послідовності $\{\zeta^{(n)}(x)\}$ буде розв'язком нелінійного інтегрального рівняння (12), випливатиме з теореми єдиності розв'язку.

Починаючи з'ясування збіжності послідовних наближень, розглянемо різницю

$$\left(s_0^{(n+1)}-\overline{s}_0^{(n+1)}\right)-\left(s_0^{(n)}-\overline{s}_0^{(n)}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{s^{(n)}-\overline{s}^{(n)}}{s^{(n)}-z}ds^{(n)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{s^{(n-1)}-\overline{s}^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}ds^{(n-1)}$$

Для спрощення викладок позначимо $s_0^{(n+1)}-s_0^{(n)}=i\left(\zeta^{(n+1)}-\zeta^{(n)}\right)=i\eta^{(n)},\ n-0,1,2,...,$ і, скориставшись тим, що прирости $\eta^{(n)}$ за метрикою простору неперервних функцій $C\left(R^{(1)}\right)$ набагато менші самих наближень $\zeta^{(n)}$ контуру ξ, матимемо

$$\frac{1}{s^{(n+1)}-z}=\frac{1}{s^{(n)}-z}\frac{1}{1+i\eta^{(n)}/\left(s^{(n)}-z\right)}=\frac{1}{s^{(n)}-z}\left(1-\frac{i\eta^{(n)}}{s^{(n)}-z}+\left(\frac{i\eta^{(n)}}{s^{(n)}-z}\right)^2-...\right),$$

$$ds^{(n+1)}=ds^{(n)}+id\eta^{(n)},\ n=0,1,2,...$$

У цих позначеннях попередня рівність виглядає так:

$$\eta^{(n)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{\zeta^{(n)}}{s^{(n)}-z}ds^{(n)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n-1)}}\frac{\zeta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}ds^{(n-1)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{\zeta^{(n)}-\zeta^{(n-1)}}{s^{(n)}-z}ds^{(n)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{\zeta^{(n-1)}}{s^{(n)}-z}ds^{(n)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n-1)}}\frac{\zeta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}ds^{(n-1)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{\eta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}\left(1-\frac{i\eta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}+\left(\frac{i\eta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}\right)^2-...\right)\left(ds^{(n-1)}+id\eta^{n-1}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{\zeta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}\left(1-\frac{i\eta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}+\left(\frac{i\eta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}\right)^2-...\right)\left(ds^{(n1)}+id\eta^{(n-1)}\right)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n-1)}}\frac{\zeta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}ds^{(n-1)}.$$

Звідси з точністю до величин другого порядку щодо приростів $\eta^{(n)}$ отримуємо співвідношення

$$\eta^{(n)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n-1)}}\left[\frac{2\eta^{(n-1)}}{s^{(n-1)}-z}-\eta^{(n-1)}\frac{s^{(n-1)}-\overline{s}^{(n-1)}}{\left(s^{(n-1)}-z\right)^2}\right]ds^{(n-1)},$$

з якого встановлюємо нерівність

$$\left\|\eta^{(n)}\right\|_C\le\frac{1}{2\pi}\left\|\eta^{(n-1)}\right\|_C\left|\int\limits_{\partial D^{(n-1)}}\left[\frac{2}{s^{(n-1)}-z}-\frac{s^{(n-1)}-\overline{s}^{(n-1)}}{\left(s^{(n-1)}-z\right)^2}\right]ds^{(n-1)}\right|\le\frac{1}{2}\left\|\eta^{(n-1)}\right\|_C.$$

Ця нерівність слугує основою для наступного ланцюжка

$$\left\|\zeta^{(n+1)}-\zeta^{(n)}\right\|_C\le 2^{-1}\left\|\zeta^{(n)}-\zeta^{(n-1)}\right\|_C\le 2^{-2}\left\|\zeta^{(n-1)}-\zeta^{(n-2)}\right\|_C\le...\le 2^{-n}\left\|\zeta^{91}-\zeta^{(0)}\right\|_C,$$

який, у свою чергу, засвідчує, що оператор $A(\zeta;z)$ задачі для контактної поверхні є *стискаючим*. Наближення $\zeta^{(n)}(x),\ n=0,1,2,...,$ збігаються до розв'язку $\zeta(x)$ рівняння (12) зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником 2^{-n}. Теорему доведено.

Зауваження. Оператори

$$B\left(u,\zeta^{(n)};z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^{(n)}}\frac{s^{(n)}-\overline{s}^{(n)}}{s^{(n)}-z}ds^{(n)}-u(z)$$

послідовності $\{B(u,\zeta^{(n)};z)\}$, яка, очевидно, апроксимує при $s_0^{(0)}-\bar{s}_0^{(0)}=u(z)$ обернений (нелінійний) оператор $A^{-1}(\zeta;z)$ рівняння для контактної поверхні, є *обмеженими*, *неперервними* і *компактними* операторами на компакті $V(A)$. Виявити ці властивості можна за допомогою засобів, які було застосовано під час досліджень оператора $A(\zeta;z)$ прямої задачі. До того ж, кожен з операторів $B(u,\zeta^{(n)};z)$, $n=0,1,2,\ldots$, проектує на нумерівську множину $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$. Дійсно, для переконання в істинності останнього висловлювання досить у зображенні оператора перейти до параметричного його подання, а саме

$$B(u,\zeta^{(n)};z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta^{(n)}(\xi)\left(1+i\dfrac{d\zeta^n}{d\xi}\right)}{\xi+i\zeta^n(\xi)-z}d\xi-u(z)$$

Наявність у зображенні (інтегрованої) похідної $\dfrac{d\zeta^{(n)}(\xi)}{d\xi}$ від наближення $\zeta^{(n)}(\xi)$ контуру $\zeta(\xi)$, $\xi\in R^{(1)}$, є ознакою функції, що належить до множини $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$.

Отже, в перебігу доведення теореми існування розв'язку знайдено таку послідовність $\{B(u,\zeta^{(n)};z)\}$ компактних операторів $B(u,\zeta^{(n)};z)$, $n=0,1,2,\ldots$, яка обмежену множину $V(A)$ функцій $u(z)$ однозначно проектує на компакт $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ і прямує за метрикою простору неперервних функцій $C(R^{(1)})$ на певному елементі $u(z)$ множини $V(A)$ до нелінійного оберненого оператора $A^{-1}(\zeta;z)$ рівняння для контактної поверхні.

Теорема 4 (стійкості). *Нехай функції $\zeta_i(x)$, $x\in R^{(1)}$, $i=1,2$, що описують границі розподілу однорідних шаруватих середовищ, належать до класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$. Якщо за достатньо малого числа $\varepsilon>0$ поля $u_i(z)$, $z\in R^{(1)}$, які породжуються відповідно контурами $\zeta_i(x)$, підкоряються вимозі*

$$\|u_1(z)-u_2(z)\|_C\le\varepsilon,$$

тобто їх вважають близькими, то самі границі також незначно відрізняються одна від одної в сенсі виконання умови $\|\zeta_1(x)-\zeta_2(x)\|_C\le 2\varepsilon$.

Для доведення теореми розглянемо різницю

$$\zeta_1(x)-\zeta_2(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^{(1)}}\frac{\zeta_1(\xi)}{s^{(1)}-z}ds^{(1)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^{(2)}}\frac{\zeta_2(\xi)}{s^{(2)}-z}ds^{(2)}-u_1(z)+u_2(z).$$

Оскільки

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^{(1)}}\frac{\zeta_1(\xi)-\zeta_2(\xi)}{s^{(1)}-z}ds^{(1)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^{(1)}}\frac{\zeta_2(\xi)}{s^{(1)}-z}ds^{(1)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^{(2)}}\frac{\zeta_2(\xi)}{s^{(2)}-z}ds^{(2)}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial D^{(1)}}\frac{\zeta_1(\xi)-\zeta_2(\xi)}{s^{(1)}-z}ds^{(1)}+\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_2(\xi)\left[\frac{1+i\zeta_1'(\xi)}{\xi+i\zeta_1(\xi)-z}-\frac{1+i\zeta_2'(\xi)}{\xi+i\zeta_2(\xi)-z}\right]d\xi\right|\le\frac{1}{2\pi}\|\zeta_1(\xi)-\zeta_2(\xi)\|_C\times$$

$$\times\left|\int_{\partial D^{(1)}}\frac{ds^{(1)}}{s^{(1)}-z}\right|+\frac{\|\zeta_2(\xi)\|_C}{2\pi}\left|\int_{\partial D^{(1)}}\frac{ds^{(1)}}{s^{(1)}-z}-\int_{\partial D^{(2)}}\frac{ds^{(2)}}{s^{(2)}-z}\right|=\frac{1}{2}\|\zeta_1(\xi)-\zeta_2(\xi)\|_C,$$

то $\|\zeta_1(x)-\zeta_2(x)\|_C\le 2\|u_1(z)-u_2(z)\|_C\le 2\varepsilon$ і теорему доведено.

Доведенням теореми стійкості завершено дослідження умов коректної розв'язності оберненої задачі логарифмічного потенціалу для контактної поверхні в комплексній площині. Задачу поставлено коректно на компактній множині $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ неперервних разом з першими похідними функцій саме тому, що на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ розв'язок задачі не тільки існує, а водночас є є диним і стійким.

Особливістю проведеного теоретичного аналізу задачі є редукція задачі до розв'язування нелінійного інтегрального рівняння (12) типу рівняння Урисона. Це рівняння отримано відповідною корекцією (на основі визначальної леми) рівняння для контактної поверхні в комплексній площині, виведеного у статті [45]. Ліву частину отриманого рівняння, що залежить від невідомої функції, подано у вигляді двох складових, одна з яких – невідома функція – домінує (за нормою) над іншою, що є інтегральним оператором над невідомою фунцією. Вигода такого подання (на зразок лінійного інтегрального рівняння другого роду) чітко вбачається в напрямі дослідження рівняння. По-перше, подання виявилося доступним для вивчяення умов єдиності, існування та стійкості розв'язків винятково елементарними засобами. По-друге, виглядом рівняння визначився і спосіб його точного розв'язання.

А з огляду на те, що точний розв'язок відшукують за допомогою певного процесу послідовних наближень, сконструйованого, у свою чергу на основі вихідного подання рівняння, це подання стає вирішальним і в практичній реалізації розв'язку задачі в умовах, коли праву частину рівняння задано з перешкодами на дискретній множині точок.

Список літератури

1. *Нумеров Б.В.* Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // Докл. АН СССР. - 1930. - № 21. - С. 569-574.
2. *Малкин Н.Р.* О решениии обратной магнитометрической задачи для случая одной контактной поверхности при пластообразном залегании масс // Докл. АН СССР. - 1931. - А, № 9. - С. 231 -235.
3. *Малкин Н.Р.* Определение толщины однородного материального слоя, покрывающего сферу или плоскость по заданному потенциалу его // Тр. физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова. - 1932, т. **2**. - Вып. 4. - С. 17-26.
4. *RainbЬoy H.* The interpretation of torsion balanse data // Proc. Ist World Petr. Congr., London, July 19-25. - 1933. - P. 406-413.
5. *Hughes D.* The analitical basis of gravity interpretation // Geophysics. - 1942. - 7, № 2. - P. 169-178.
6. *Андреев Б.А.* Расчеты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. - 1947. - № 1. - С. 79-92; - 1949. - № 3. - С. 256-267; -1952. - № 2. - С. 1-30; - 1954. - № 1. - С. 49-64.
7. *Андреев Б.А., Клушин И.Г.* Геологическое истолкование гравитационных аномалий. - Л.: Недра, 1965. – 496 с.
8. *Страхов В.Н.* Сведение проблемы аналитического продолжения в горизонтальний слой к решению линейных интегральных уравнений первого рода типа свертки с быстро убывающими ядрами // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. - 1963, № 8. - С. 1206-1221.
9. *Цирульский А.В. О* связи задачи об аналитическом продолжении логарифмического потенциала с проб-лемой определения границы возмущающей области // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. - 1964. - № 11. - С. 1693-1696.
10. *Страхов В.Н.* Некоторые применения функционально-аналитических методов в математической теории интерпретации гравитационнъїх й магнитных аномалий: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 04.00.22 / Мос. ун-т. - М., 1972. - 78 с.
11. *Заморев А.А.* Исследование двухмерной обратной задачи теории потенциала // Изв. АН СССР. Сер. Геогр. и геофиз. - 1941. - № 4-5. - С. 487-500.
12. *Заморев А.А.* Определение формы тела по производньм внешнего гравитационного потенциала // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. - 1942. № 1-2. - С. 48-54.
13. *Шванк О.А , Люстих Е.Н.* Интерпретация гравитационных наблюдений. - М.-Л.: Гостоптехиздат, 1947. – 400 с.
14. *Маловичко А.К.* Об определении контактной поверхности по гравитационным аномалиям // Прикл. геофизика. - 1948. - 5. - С. 77-97.
15. *Маловичко А.К.* Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиразведки. - М.: Гостоптехиздат, 1956. - 160 с.
16. *Новоселщкий В.М.* О построении плотностной границы по аномалиям силы тяжести // Прикл. геофизика. -1966. -47.- С. 120-129.
17. *Новоселщкий В.М., Гордин В.М.* Построение слоисто-зональной модели плотностного разреза осадочной толщи по данным гравиразведки // Уч. зап. Пермского Ун-та, 1975, № 305. - С. 115-128.
18. *Сербуленко М.Г.* Линейные методы разделения потенциальных полей // Дополнительные главы курса гравиразведки и магниторазведки (под ред. 3.3. Фотиади). - Новосиб.: Изд-во Новосиб. ун-та, 1966. - С. 389-457.
19. *Сербуленко М.Г.* Линейные методы разделения потенциальных полей // Приложение некоторых методов математики к интерлретации геофизических данных. - Новосиб.: Наука СО. — 1967. - С. 5-75.
20. *Антонов Ю.В.* Решение обратной задачи гравиразведки для контактной поверхности при наличии нескольких границ раздела // Разведочная геофизика. - 1976. Вьп. **71**. - С. 87-94.
21. *Антонов Ю.В.* Решение обратной задачи гравиразведки для двух контактных поверхностей // Развед. геофизика. - 1978. - 81. - С. 75-81.
22. *Антонов Ю.В., Филатов В.Г.* Решение обратной задачи гравиметрии для двух контактных поверхностей // Прикл. геофизика. - 1979. - Вып. **94**. - С. 136-140.
23. *Гласко В.Б., Остромогильский А.Х., Филатов В.Г.* О восстановлении глубины и формы контактной поверхности на основе регуляризации // ЖВМиМФ. - 1970. - **10**, № 5. - С. 1292-1297.
24. *Гласко В.Б., Володин Б.А., Мудрецоеа Е.А., Нефедоеа Н.Ю.* О решении обратной задачи гравиметрии для контактной поверхности методом регуляризации // Изв. АН СССР. Сер. ФЗ. - 1973. - № 2. - С. 30-41.
25. *Гласко В.Б., Гущин Г.В., Гущина Л.Г., Мудрецоеа Е.А.* Об использовании данных бурения при восстановлении формы контакта с помощью метода регуляризации // ЖВМиМФ. - 1974. - **14**, № 5. - С. 1272-1280.
26. *Тихонов А.Н., Гласко В.Б.* О применении метода регуляризации в задачах геофизической интерпретации // Изв. АН СССР. Сер. ФЗ. - 1975. - № 1. - С. 38-48.
27. *Мудрецоеа Е.Г., Филатов В.Г.* Определение границы залегания, формы, избыточной плотности и участка модуляции контактной поверхности // Прикл. геофизика. - 1975. - Вып. **78**. - С. 153-158.
28. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. - М.: Наука, 1978. - 206 с.

29. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. - М.: Наука, 1979. — 288 с.

30. *Гравиразведка.*.Справочник геофизика (под ред. Е.А. Мудрецовой). - М. Наука, 1981. - 400 с.

31. *Старостенко В.И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. - Киев: Наукова думка, 1978. – 228 с.

3I.*Денисюк Р.П.* Некоторые вопросы решения обратной задачи гравиразведки для контактных поверхностей // Докл. АН СССР. Сер. Б. - 1981. - № 12. - С. 8-10.

33. *Кобрунов А..И., Денисюк Р.П.* Решение обратной задачи гравиразведки в классе плотностных границ с переменной плотностью на контакте // Изв. ВУЗов. Геология и разведка. - 1982. - № 9. - С. 108-117.

34. *Кобрунов А.И.* Анализ линейных приближений обратной задачи структурной гравиметрии // Докл. АН УССР. Сер. Б. - 1982. - № 9. - С. 7-9.

35. *Страхов В.Н.* Об обратной задаче логарифмического потенциала для контактной поверхности // Докл. АН СССР. - 1971. т. 200, № 4. - С. 817-820.

36. *Страхов В.Н.* Основное фундаментальное уравнение плоской обратной задачи потенциала и нелинейный метод аналитического продолжения двухмерных потенциальных полей // Изв. АН СССР. Сер. ФЗ. - 1971. -№4.-С. 48-57.

37. *Страхов В.Н.* К теории структурной гравиметрии // Прикл. геофизика. - 1972. - Вып. **68**. - С. 119-138.

38. *Страхов В.Н.* Об обратной задаче логарифмического потенциала для контактной поверхности // Изв. АН СССР. Сер. ФЗ. - 1974. - № 2. - С. 43-65; 1974. - № 6. - С. 39-60.

39. *Страхов В.Н.* Об интегральных и функциональных уравнениях некоторых обратных задач теории логарифмического потенциала и их значений для интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Изв. АН СССР. Сер. ФЗ. - 1976. - № 3. - С. 54-66.

40. *Иванов В.К.* Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала // Докл. АН СССР. - 1955. - 105, №3.-С. 409-411.

41. *Иванов В.К.* О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде // Докл. АН СССР. - 1956. - 106, № 4. - С. 598-599.

42. *Цирульский А.В., Федорова Н.В.* К вопросу о разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности в конечном виде // Изв. АН СССР. - Сер. ФЗ. - 1976. - № 10. - С. 61-72.

43. *Цирульский А.В., Никонова Ф.И., Федорова Н.В.* Метод интерпретации гравитационных и магнитных аномалий с построением зквивалентных семейств решений. - Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980. - 136 с.

44. *Чередниченко В.Г.* Обратная задача для потенциала слоистых сред в двухмерном случае // Дифф. урав-нения. - 1978. - 14, № 1. - С. 140-147.

45. *Старостенко В.И., Черная* Я.Я., *Черный А.В.* Интегральное уравнение обратной задачи потенциала для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. Б. - 1988. - № 2. - С. 25-29.

46. *Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В.* Условия однозначной разрешимости и устойчивости обратной задачи теории потенциала для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. Б. - 1988. - № 3. - С. 26-30.

47. *Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В.* Условия существования решения обратной задачи теории потенциала для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. Б. - 1988. - № 6. - С. 30-33.

48. *Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В.* Линеаризованная постановка обратной задачи потенциала для контактной поверхности //Докл. АН УССР. Сер. Б. - 1988. -№ 7. -С. 17-21.

49. *Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В.* Характеристические свойства оператора прямой задачи для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. Б. - 1990. - № 3. - С. 17-20.

50. *Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В.* Регулярные способы решения уравнения для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. Б. - 1990. - № 4. - С. 26-29.

51. *Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В.* Построение регулярного способа решения уравнения для контактной поверхности в случае задания поля на коротком интервале // Докл. АН УССР. Сер. Б. - 1990. -№ 5.-С. 28-31.

52. *Черная Н.Н.* Исследование обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. - Киев: Институт геофизики АН УССР. - 1990. -16с.

53. *Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В.* Обратная задача теории логарифмического потенциала для контактной поверхности. - В кн. “Интерпретация гравитационных и магнитных полей”. - Киев: Наукова думка, 1992.-С. 200-235.

54. *Черный А.В.* Избранныïе задачи гравиметрии и гравиразведки и методы их решения: Автореф. дис. ... д-ра. Физ.-мат. наук. - Киев: Институт геофизики НАН Украины. - 1992. - 34 с.

55. *Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В.* Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности. 1-3 // Изв. РАН. Физика Земли. - 1992. - № 6. - С. 48-58; - 1993. - № 7. - С. 47-56; - 1993. - № 7. - С. 57-66.

56. *Новиков П.С.* О единственности решения обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. - 1938. - т. **18**, №3. - С. 165-168.

57. *Сретенский Л.Н.* О единственности определения формы притягивающего тела по значенням его внешнего потенциала // Докл. АН СССР. - 1954. - т. **99**, № 1. - С. 21-22.

58. *Тодоров И.Т., Зидаров Д.П.* О единственности определения формы притягивающего тела по значенням его внешнего потенциала // Докл. АН СССР. - 1958. - т. **120**, № 2. - С. 262-264.

59. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. - Новосибирск: Изд-во СОАН СССР, 1962. - 92 с.

60. *Прилепко А.И.* К теории обратных задач обобщенных потенциалов: Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. – Новосибирск, 1968. – 32 с.

61. *Старостенко В.И., Черная О.А., Черная Н.Н., Черный А.В.* О постановке обратных задач логарифмического

потенциала определения формы некоторых тел, близких к заданным // Геофиз. журн. - 1998. - т. **20**, № 1.- С. 15-25.

62. *Старостенко В.И., Черная О.А., Черная Н.Н., Черный А.В.* О фундаментальных свойствах операторов прямого соответствия в задачах определения звездных областей, близких к заданным // Геофиз. журн. - 1998. - т.**20**, №3.- С. 3-23.
63. *Старостенко В.И., Черная О.А., Черная Н.Н., Черный А.В*. Проблемы существования, единственности и устойчивости решений задач определения звездных областей, близких к заданным // Геофиз. журн. - 1999. -т. **21**, № 1. - С. 3-19.
64. *Старостенко В.И., Черная О.А., Черная Я.Я., Черный А.В*. Последовательности линейных интегральных уравнений для восстановления звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. - 1999. - №2.- С. 135-139.
65. *Старостенко В.И., Черная О.А., Черная Н.Н., Черный А.В*. О характеристических свойствах операторов прямого соответствия в задачах определения звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. - 1999. - № 5. - С. 1 46-149.
66. *Старостенко В.И., Черная О.А., Черная Я.Я., Черный А.В*. Об условиях разрешимости задач определения звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. - 1999. - № 6. - С. 135-138.
67. *Черная О.А.* Об устойчивых способах решений задач определения звездных областей, близких к заданным. Ч. 1,2 // Геофиз. журн.- 1999.- т. **21**, №3.- С. 100-118; - 1999. - т. **21**, № 6. - С. 51-71.
68. *Чорна О.А*. Дослідження обернених задач теорії логарифмічного потенціалу для тіл, близьких до заданих: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. - Київ: Інститут геофізики НАН України. - 1999. – 18 с.
69. *Черная О.А*. Функционалы в задачах определения звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. - 2000. - № 1. - С. 124-127.
70. *Черная О.А.* Вариационный принцип отбора допустимых решений задач восстановления звездных областей, близких к заданным // Докл. НАН Украины. - 2000. - № 2. - С. 128-131.
71. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В*. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958. – 680 с.
72. *Канторович Л.В., Акилов Г.П*. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977. – 744 с.